ACERCA DE LOS NUMEROS ÍNDICE COMPLEJOS

La medición de la evolución temporal de las variables económicas presenta elementos controvertidos en la medida que los valores económicos son compuestos de precios y cantidades, en consecuencia sus variaciones a lo largo del tiempo responden a modificaciones, en igual o distintos sentidos e intensidad, de cada uno de sus componentes. Los números índice constituyen el instrumento adecuado para facilitar las mencionadas mediciones, sin embargo presentan restricciones que obligan a profundas reflexiones basadas no sólo en consideraciones estrictamente teóricas sino también a consideraciones de orden práctico.

El denominado "Problema de los Números Índice o Efecto Ponderación" se origina en que la tasa de crecimiento de cualquier agregado, en términos reales si se mide evolución de cantidad (por ej. Producto Interno Bruto o Inversión Interna Bruta) y en términos nominales si se mide la evolución de precios (por ej. Índice de Precios al Consumidor o Índice del Costos de la Construcción) **depende del procedimiento aritmético utilizado para agregar las variaciones y de la estructura de ponderaciones utilizada**. En efecto, las estructuras de ponderaciones se modifican a lo largo del tiempo, y las modificaciones son mayores cuánto mayores son los cambios de los precios relativos, y su consecuente impacto por los efectos sustitución (en la producción y el consumo).

Las diferencias que se obtienen en las estimaciones al cambiar las ponderaciones, en definitiva son una medida del CAMBIO ESTRUCTURAL operado en las estructuras de Producción o Consumo de una economía. El principio subyacente en la existencia del problema es que **"las estructuras de ponderación envejecen cuando se modifica la estructura de precios relativos"** lo que determina un factor de ambigüedad en la interpretación de los resultados de los números índice en la medida que no podemos responder de manera unívoca respecto de fenómenos económicos que **en la realidad ocurren de una UNICA manera**.

El presente documento describe los factores que originan el problema, explora en la literatura las diferentes alternativas para el abordaje exitoso del mismo, se elaboran y analizan ejemplos que permiten ilustrar el origen y la intensidad del problema y se obtienen conclusiones muy precisas respecto a las alternativas disponibles para acotar la medición a un entorno cuya amplitud reduce considerablemente la ambigüedad de la inconsistencia planteada.

Considero que las conclusiones obtenidas constituyen una importante contribución a una discusión de mucha actualidad, en la medida que establece con extrema precisión los límites a los que queda circunscripta la ambigüedad, cerrando la puerta de un camino que parecía haber dejado un ilimitado espacio para una "contabilidad creativa" de los fenómenos económicos vinculados con las subas de precios y de la actividad económica.

Aspectos conceptuales de los Números Índice.

La razón de la utilidad de los números índices consiste en poder sintetizar los datos referidos a varias series estadísticas en una única serie que muestre la evolución en su conjunto del vector de magnitudes analizado. En efecto, el concepto de número índice en sentido estricto hace referencia a la medición de las variaciones de una magnitud no observable. Así, se propuso la definición clásica de número índice como: *«Un número que mediante sus variaciones indique los aumentos o disminuciones de una magnitud no susceptible de medir con exactitud»*. Se pretende de esta forma medir los cambios en magnitudes en cierto modo genéricas como son el nivel general de precios o su recíproca el valor o poder adquisitivo del dinero, la producción e ingreso nacional, o por ejemplo el precio de la vivienda en singular. Todas estas magnitudes son complejas, en el sentido de condensar en ellas un conjunto diverso de variables.

En la bibliografía se menciona que: ***«El problema de los números índices aparece siempre que queramos expresar cuantitativamente una magnitud compleja que se compone de mediciones individuales para las cuales no existe ninguna unidad física común. El deseo de unificar tales mediciones y el hecho de que esto no puede ser realizado utilizando únicamente principios de comparación físicos o técnicos, constituye la esencia del problema de los números índices».*** En consecuencia el verdadero interés de los números índices no reside en el cálculo de índices simples, sino en la elaboración de números índice «complejos».

La medida del valor de un número índice utilizando un vector de precios relativos muy diferente del vigente en el momento de realizarse la transacción económica puede conducir a resultados que no son aceptables para fines analíticos, dificultad conocida **como "el problema de los números índice". El "efecto sustitución" que se produce frente a las modificaciones de los precios relativos no es captado.** La solución recomendada a este problema consiste en confeccionar índices en cadena, que permiten ir actualizando período a período la base. La implementación de un sistema de números índice en cadena es recomendada por el manual de cuentas nacionales (Sistema de Cuentas Nacionales, capítulo 16) con el objeto de evitar los problemas de medición que se producen cuando los precios (cantidades) relativos de la economía se modifican.

La teoría económica sugiere que, en general, un índice simétrico y superlativo es preferible a los índices de Laspeyres o de Paasche considerados por separado. La elección precisa del índice simétrico –sea de Fisher, de Tornquist u otro índice superlativo- puede tener sólo una importancia secundaria, en tanto que los valores de todos los índices simétricos es probable que se aproximen muy estrechamente unos a otros, y al índice teórico subyacente, al menos cuando la dispersión de los índices de Laspeyres y Paasche no sea muy grande.

En la elaboración de un índice de precios complejo se presentan dos cuestiones que hay que resolver: **el criterio de agregación y el criterio de ponderación** que deberán utilizarse. **El criterio de agregación** consiste en determinar de que forma se van a sintetizar los valores de las distintas variables consideradas (por ejemplo los precios de los diferentes bienes o la producción de bienes y servicios heterogéneos) en una sola magnitud (costo de la vida o nivel general de precios y estimadores de la actividad económica). Habrá que elegir entre algún tipo de promedio, de modo que tendremos índices de precios complejos basados en la media aritmética, la media geométrica y la media armónica, entre otros **(ver Anexo Metodológico)**.

El criterio de ponderación consiste en atribuir un determinado peso a cada una de las variables que se promedian, es decir discriminar entre las diferentes variables (precios / cantidades) dando a cada una de ellas la importancia relativa que tienen dentro del conjunto al que pertenecen. E! criterio más sencillo consiste en agregar los diferentes índices simples asignando a cada uno de ellos el mismo peso o importancia. En ese caso obtendríamos un índice de precios complejo sin ponderar.

Un índice complejo de precios ponderado puede entenderse como algún tipo de promedio de los diferentes índices de precios simples, en donde cada uno de estos pondera según la importancia relativa de las transacciones realizadas. Como en un índice temporal se comparan distintos períodos de tiempo, hay que determinar qué valor de las transacciones se toma como factor de ponderación. Existen básicamente las siguientes alternativas:

• Tomar como factor de ponderación de cada índice simple el valor de las **transacciones realizadas en el período base,**
• Tomar como ponderación el valor de las **transacciones realizadas en el período actual,**
• Utilizar como ponderaciones valores ficticios que **combinen los precios del período base con las cantidades del período actual o viceversa,**

Combinando estos y otros criterios de ponderación menos habituales con las diferentes formas de agregación (media aritmética, media armónica, y media geométrica, entre otras), obtendríamos un conjunto muy numeroso de posibles índices. En su obra «The Making of indcx Numbers», **IRVIN FISIHER** (1922) hace referencia **a 134 fórmulas distintas para calcular números índices.** Sin embargo, de todas ellas, las utilizadas con mayor frecuencia son las siguientes:

- **Índice de Laspeyres *(1)***. Es una media aritmética de índices de precios simples que utiliza como ponderaciones el valor de las transacciones realizadas en el período base.

- **Índice de Paasche (Ir)**. Es también una media aritmética de índices simples, que utiliza como coeficiente de ponderación el valor ficticio de las transacciones efectuadas en el período actual calculado a precios del período base. En consecuencia el índice de Paasche es una media agregativa de precios ponderados por las cantidades del período actual.

- **Índice ideal de Fisher.** Es la media geométrica de los índices de precios de Laspeyres y Paasche.

Enfoques alternativos en la teoría de los Números Índice. Puesto que los diferentes índices propuestos difieren en la forma funcional o en la cesta de bienes que valoran, los resultados obtenidos y el comportamiento de cada uno de ellos puede ser muy distinto. Precisamos disponer de algunos criterios que nos permitan seleccionar aquellos índices que midan correctamente el comportamiento de la variable objeto de estudio. En este sentido, existen dos enfoques alternativos en la teoría de los números índices:

• **Enfoque axiomático**. Los fundamentos teóricos de los números índices se construyen a partir de ciertos postulados o axiomas que se consideran tan generales que todo número índice debe cumplirlos en la práctica. Este enfoque tiene su origen en los trabajos de Fisher, al establecer ciertas condiciones o tests que cualquier número índice debe satisfacer para ser utilizado en el análisis y la política económica.

El enfoque axiomático parte de considerar exclusivamente los precios y cantidades observados en los períodos de tiempo o situaciones que se quieren comparar. Estos precios y cantidades se suponen variables independientes, a diferencia del enfoque de la teoría económica en el que las cantidades se consideran función de los precios. Un índice de precios se define como una función de los precios y cantidades observadas que satisface cuatro axiomas básicos:
Monotonicidad: el índice de precios debe aumentar (disminuir) si alguno de los precios del período corriente aumenta (disminuye), o alguno de los precios del período base disminuye (aumenta).
Proporcionalidad: si en el período corriente todos los precios aumentan (disminuyen) uniformemente en una determinada proporción, el número índice aumenta (disminuye) en esa misma proporción.
Dimensionalidad de los precios: si se produce un cambio proporcional en la unidad de cuenta utilizada para medir los precios de los períodos de referencia, el índice permanecerá inalterado.
Conmensurabilidad de las cantidades: un cambio en la unidad de medida de las cantidades de cualquier bien en todos los períodos de referencia no debe afectar al número índice.

Sin embargo, la aplicación de estos cuatro axiomas como único criterio de demarcación entre números índice no es muy selectiva, puesto que la mayoría de los números índice comúnmente utilizados los satisfacen. Con objeto de estrechar este campo, se han considerado otras condiciones adicionales que los números índices deben cumplir. La más importante de estas condiciones es el llamado **«test del producto».** El test del producto es una versión débil del famoso test de la reversibilidad de factores de Fisher y establece que el producto de un índice de precios y un índice de cantidad (cumpliendo ambos los cuatro axiomas básicos, aunque no tengan necesariamente la misma forma), debe ser igual al índice de valor del gasto. Esta condición tiene aplicaciones muy importantes en el análisis de series temporales, pues de ella se deriva que dividiendo la variación de los valores corrientes por un índice de precios, obtendremos un aceptable índice de cantidades y viceversa.

Esta propiedad es de gran utilidad en la estadística económica, pudiendo obtenerse el deflactor del PIB de forma indirecta dividiendo la suma de valores por un índice de cantidad tipo Laspeyres. En cualquier caso, añadido a la lista de axiomas básicos, el test del producto no consigue restringir apreciablemente el conjunto de números índices ideales desde el punto de vista teórico. Por ello se han discutido otras propiedades o tests que los números índices deberían cumplir, entre ellos el test de la circularidad. o transitividad en expresión moderna requiere que una comparación directa entre las situaciones *A* y *C* nos llevará al mismo resultado que una comparación indirecta entre *A* y *C* vía B. Si se añade el test de la circularidad a las condiciones anteriores como prueba adicional, se produce el resultado sorprendente de que ninguno de los números índices habituales cumple todas las condiciones. En efecto, se ha demostrado el «teorema de la no existencia », según el cual no existe ningún posible número índice que satisfaciendo los cuatro axiomas básicos, cumpla simultáneamente los tests del producto y de la circularidad.

En consecuencia, es preciso relegar o soslayar alguna de estas condiciones. Dado el carácter incontrovertido de los cuatro axiomas básicos y la importancia práctica del test del producto, el test de la circularidad ha sido abandonado por la mayoría de los autores como condición exigida a los números índices ideales.

• **Enfoque de la teoría económica**. En este enfoque se definen los números índices con referencia a las funciones de utilidad o producción según los casos con la cuál se vincula. Mientras que el enfoque axiomático se centra en las propiedades que deben cumplir los números índices, de modo que su comportamiento ante ciertas circunstancias sea lógicamente consistente, este enfoque se preocupa de la consistencia de estos índices desde el punto de vista de la teoría económica.

Siguiendo la lógica de la teoría económica, los precios y las cantidades no son tratados como variables independientes, sino que las cantidades se suponen función de los precios. De esta forma la información básica para la elaboración de un número índice no son los vectores de precios y cantidades observadas, sino un vector de precios más una relación funcional que conecte las cantidades con los precios en cada una de las situaciones que se comparan. **Los parámetros de estas funciones generalmente no se conocen ni es posible su estimación en la mayoría de las situaciones reales, por lo que los números índices teóricos, aunque se definan con precisión, no pueden ser calculados en la práctica salvo supuestos muy restrictivos.**

Básicamente existen dos tipos de funciones que permiten relacionar desde un punto de vista teórico precios y cantidades: **funciones de utilidad y funciones de producción.** A los fines de la discusión, nos centraremos en la discusión de un índice de precios de bienes de consumo, por lo que emplearemos funciones de utilidad. El ejemplo clásico de índice teórico desde el punto de vista económico **es el índice del coste de la vida, se define como el cociente de mínimo gasto requerido para situarse en una curva de indiferencia concreta bajo dos regímenes de precios distintos**. El análisis con funciones de producción es casi idéntico, siendo aplicables la mayoría de las conclusiones que obtengamos a este otro caso.

Este principio indica que, para otro conjunto de precios relativos, la combinación elegida que reporte al consumidor el mismo nivel de utilidad será distinta. Ahora el gasto mínimo de obtener el mismo nivel de utilidad se modifica a medida que los precios relativos cambian, pero generalmente difiere del gasto necesario para mantener la combinación inicial de cantidades a los nuevos precios.

De este análisis obtenemos las siguientes conclusiones:

- El verdadero problema de los números índices de precios reside en la variación experimentada en los precios relativos, y
- El índice dependerá no solo de los dos vectores de precios (en el período base y en el período actual), sino también del mapa de curvas de indiferencia específico que se utilice, y de la elección de una determinada curva de indiferencia que se toma como base.

Este índice teórico no puede calcularse directamente, pues no todas las magnitudes son directamente observables. En consecuencia, el problema consiste en definir el índice teórico inobservable a partir de los precios y cantidades observadas.

Los índices de coste de la vida son una de las posibles alternativas de medición de las variaciones en el bienestar individual, mediante la comparación de la variación experimentada en dicho índice con la variación de la renta del consumidor. Si midiéramos la variación experimentada en el costo de vida mediante un índice de precios de Laspeyres, teniendo en cuenta que en este caso las ponderaciones de los precios son fijas e iguales a las cantidades de la combinación inicial, es posible demostrar que exagera o sobreestima el verdadero aumento experimentado en el costo de vida. El sesgo ascendente del índice de precios de Laspeyres es consecuencia de que las ponderaciones o cesta de bienes que utiliza son fijas, no teniendo en cuenta los efectos de sustitución que originan las variaciones de los precios relativos.

Si aproximamos este índice mediante un índice tipo Paasche, utilizaremos como ponderaciones las cantidades de bienes de la combinación final, en este caso es posible demostrar que el indicador obtenido presenta un sesgo bajista respecto al índice teórico. Como el índice de Laspeyres, utiliza ponderaciones fijas, en que no consideran los efectos sustitución derivados de las variaciones de los precios relativos.

A partir de este resultado general y con objeto de acercar los índices obtenidos a partir de datos observados a los índices teóricos, pueden establecerse que los índices de precios de Laspeyres y Paasche proporcionan aproximaciones por arriba y por abajo del mismo índice teórico, en cuyo caso podría tomarse **algún tipo de media de los dos como la mejor estimación posible del índice teórico. El índice ideal de Fisher (media geométrica de ambos) es el más conocido de tales índices.**

Índices de Precios en cadena. Dadas las limitaciones que presentan los índices de precios de ponderaciones fijas, una línea de investigación alternativa ha dirigido su atención hacia los llamados «índices en cadena». La propiedad de circularidad permite construir estos índices a partir de cualquiera de los índices de ponderaciones fijas o «directos» y concretamente los de Laspeyres y Paasche. En los índices en cadena, se calcula un índice con base en el período anterior por cada uno de los períodos considerados.

Directamente solo permiten comparaciones entre dos períodos consecutivos (que expresan la variación porcentual de los precios en cada período), pero mediante la aplicación de la propiedad circular pueden construirse series de índices de precios referidos al periodo base inicial. A pesar de presentar el inconveniente de ser dependientes de la senda temporal que sigan los precios relativos, existe un creciente interés teórico por los índices en cadena, pues en principio y en ciertos casos podrían reducir el diferencial entre los valores de los índices directos de Laspeyres y Paasche y sus correspondientes índices teóricos, de modo que constituyan una mejor aproximación al verdadero índice de precios.

Sin embargo, no se conocen todavía muchas de sus propiedades y forma de comportamiento. Desde el punto de vista axiomático. el resultado más destacado y criticable es que el índice en cadena no vuelve a su valor inicial cuando todos los precios vuelven a su situación inicial, no cumpliendo el axioma de proporcionalidad.

La literatura ha analizado el comportamiento de estos índices en dos situaciones extremas opuestas. Si las variaciones de los precios relativos son suaves a lo largo del período considerado, de modo que los precios relativos se mueven gradualmente sin grandes oscilaciones hasta llegar a su posición final, el índice en cadena de Laspeyres toma un valor inferior al índice directo, mientras que el índice en cadena de Paasche se sitúa por encima de su correspondiente índice directo.

Por el contrario, si los precios relativos tienden a oscilar adaptándose a su posición final mediante desviaciones positivas y negativas significativas, el índice en cadena de Laspeyres tiende a exceder a su índice directo, y el índice en cadena de Paasche toma valores inferiores a su respectivo índice directo. En el primer caso los índices en cadena nos acercarán a los índices de precios teóricos, estando justificada su utilización, mientras que en el segundo nos alejarían, siendo entonces preferibles los índices directos. Frente a estos resultados se estudia el comportamiento de los índices en cadena centrándose en la magnitud de la variación final experimentada por los precios relativos, en lugar de la forma de la trayectoria temporal, llegando a la conclusión de que los índices en cadena se alejan de los índices teóricos cuando los precios relativos no han experimentado grandes variaciones en las dos situaciones que se comparan, mientras que el diferencial disminuye cuando los precios relativos han variado significativamente, haciendo aconsejable en este último caso la utilización como ligazón de una situación intermedia entre ambas.

Ejercicio de Aplicación. Con el objeto de ilustrar la publicación se presenta un ejercicio simplificado de elaboración de un Índice de Precios al Consumidor en el que la evolución de los distintos precios ha sido seleccionada para llevar al **"extremo"** las reflexiones que nos interesa destacar.

El ejercicio contiene la siguiente información **(Ver Cuadro 1):**

- Se han seleccionado 4 bienes y/o servicios **(X1, X2, X3 y X4)**,
- La serie se refiere a 11 períodos anuales de tiempo (**Año 0 a Año 10),**
- Se definen los precios de cada uno de los 4 bienes para los 11 períodos (en pesos),
- Se definen las cantidades consumidas de cada uno de los 4 bienes para los 11 períodos (en unidades)
- Se estiman los valores del consumo (precio por cantidad) para cada uno de los 4 bienes para los 11 períodos (en pesos)

- Se estiman los valores del Índice de Precios al Consumidor (nivel general y para cada uno de los bienes) según los siguientes criterios:

  i).- A los precios del año 0 (Índice Laspeyres de base fija),
  ii).- A los precios del año 11 (Índice Paasche de base fija),
  iii).- A los precios del año T-1 (Índice Laspeyres de base encadenada),
  iv).- A los precios del año T (Índice Paasche de base encadenada),

- Se estiman las variaciones porcentuales del Indice de Precios al Consumidor (nivel general y para cada uno de los bienes) para cada uno de los años respecto al año anterior.

La variación de las cantidades y de los precios "punta a punta" (año 0 y año 11) de los 4 bienes es la misma, en consecuencia no hay variación en los precios relativos de los bienes. El caso se combina con dos alternativas de evolución de cantidades:
A1.1 = las cantidades evolucionan suavemente entre los periodos,
A1.2 = las cantidades varían fuertemente entre los períodos,

Conclusiones:

- En ambas alternativas los Índices de Precios Laspeyres y Paasche de Base Fija evolucionan de igual manera, esto se debe a que no hay cambio de precios relativos entre los bienes "punta a punta", por lo tanto no hay cambio de ponderadores ya sea que la base se establezca en el año "0" o en el año "11", en consecuencia ambos Índices "ignoran" los cambios de precios relativos ocurridos en los períodos intermedios,
- En ambas alternativas los Índices de Precios Laspeyres y Paasche de Base Encadenada difieren en su evolución, demostrando que el IPL marca el límite superior y el IPP el límite inferior. Asimismo, puede observarse que en la Alternativa 2 la diferencia entre ambos índices es mayor debido a la mayor amplitud de la variación en las cantidades.

RESUMEN Y CONCLUSIONES.

Las principales conclusiones que se desprenden del documento son las siguientes:

- La elaboración de cualquier número índice complejo referido a una variable económica introduce necesariamente un componente de ambigüedad en sus resultados y su interpretación,

- La ambigüedad ocurre necesariamente debido a que los valores económicos de distintos momentos del tiempo se modifican por variaciones en las cantidades y/o variaciones en los precios, en consecuencia para mensurar e interpretar las variaciones en cada uno de esos componentes por separado, obligan necesariamente a "elegir" un vector de cantidades (precios) de algún momento del tiempo,

- La elección de un **período específico de tiempo ("período base")** incorpora un factor de arbitrariedad en la medida que la característica distintiva de los precios es presentar movimientos relativos diferenciales en sentido (subas y bajas) y en intensidad (variaciones porcentuales) con las consiguientes consecuencias sobre las cantidades (las subas favorecen los aumentos de producción e inducen a las bajas en la utilización, y viceversa las bajas favorecen las caídas de producción e inducen a los aumentos en la utilización),

- No obstante lo anterior, la Teoría de los Números Índice, nos demuestra que a pesar de la ambigüedad introducida, es posible dejar perfectamente acotado **(Límite Inferior y superior)** el posible entorno de variación. Adicionalmente, dentro del entorno es posible seleccionar el denominado **"Índice Ideal",** es aquel que por sus atributos sería el que más se acerca a lo que efectivamente ocurrió en la realidad,

- En consecuencia, las dificultades en la precisión de las mediciones en las variables económicas **responden básicamente a la intensidad y el sentido de los movimientos en los precios relativos (y su consecuente efecto sobre las cantidades) y a cuestiones de orden presupuestario** (el elevado costo de realizar relevamientos frecuentes de información de base: censos económicos, encuestas de presupuestos y gastos de hogares, etc.) más que a ambigüedades de las propuestas que la teoría económica y la teoría de los números índices ofrecen,

ANEXO METODOLOGICO

El apartado contiene, en forma sintética y con fines didácticos[1], un conjunto de reflexiones vinculadas con las principales ventajas y desventajas que se enfrentan en la elaboración de los Índices complejos. En particular, se hace referencia a las distintas alternativas de ponderación y a los distintos procedimientos de agregación.

Índices complejos: los problemas

1) Índices elementales o simples

$$IP_t^i = \frac{p_t^i}{p_0^i} * 100$$

2) Índices complejos: Cómo sumar productos heterogéneos?

Promediando en forma ponderada:

Dos problemas

a) el problema del promedio: Qué tipo de promedio utilizar?

b) el problema de la ponderación: cuál es el período de ponderación seleccionado

a) El problema del promedio

Hay tres promedios más comunes:

1) Media: aritmética, armónica y geométrica.
2) Mediana
3) Moda

El problema de la ponderación (w)

Peso en la canasta de cada bien.

[1] .Se transcribren imágenes utilizados en las clases de la materia Indicadores Económicos I de la maestría en "Generación y Análisis de Información Estadística"

$$w^i = \frac{P^i . Q^i}{\sum_i P^i . Q^i}$$

Hay dos ponderadores posibles:

1) Inicial
2) Final

Nos queda armado el siguiente cuadro con seis opciones

	Ponderador inicial	Ponderador final
Media aritmética m	1	4
Media geométrica g	2	5
Media armónica h	3	6

Medias simples:

- **Media Aritmética**

$$mt = \frac{\sum_i x_t^i}{N}$$

Donde X: Valor de la variable individual

N: Número de valores para la variable X.

- **Media Armónica**

$$h_t = \frac{N}{\sum_i 1/x_t^i}$$

Se calcula:

1) $\frac{\sum_i 1/x_t^i}{N}$ (1) Es el promedio aritmético de las inversas de los valores de X.

2) La inversa de (1) $h_t = \frac{N}{\sum_i 1/x_t^i}$

Es la inversa del promedio aritmético de las inversas de los valores de X.

- **Media Geométrica**

$G_t = (X_1 * X_2 * X_3 * \ldots * X_n)^{1/N} = \sqrt[N]{X1.X2.X3....XN} =$ □□$X^{1/N}$

Es la raíz enésima del producto de los N valores.

Tipos de índices posibles

Las flechas señalan los índices antitéticos

Media	**Ponderadores iniciales**	**Ponderadores finales**
Aritmética	IPL	IP Palgrave
Geométrica	IGL	IGP
Armónica	IAL	IPP

Donde:
Ponderadores iniciales son:

$$w_0^i = \frac{P_0^i \cdot Q_0^i}{\sum_i P_0^i \cdot Q_0^i}$$

Ponderadores finales son:

$$w_T^i = \frac{P_T^i \cdot Q_T^i}{\sum_i P_T^i \cdot Q_T^i}$$

IPL (Indice de Precios Laspeyres): media aritmética de índices elementales con poneradores iniciales

$$IPL_t^i = \sum_i w_0^i * \frac{p_t^i}{p_0^i}$$

IP Palgrave: media aritmética de índices elementales con ponderadores finales

$$IPPAL_t^i = \sum_i w_T^i * \frac{p_t^i}{p_0^i}$$

IGL (Indice Geométrico de Laspeyres): media geométrica de índices elementales con ponderadores iniciales

$$IGL_t^i = \pi(\frac{p_t^i}{p_0^i})^{w0}$$

IGP (Indice geométrico de Paasche): media geométrica de índices elementales con ponderadores finales

$$IGP_t^i = \pi(\frac{p_t^i}{p_0^i})^{wT}$$

IAL (Indice armónico de Laspeyres): media armónica de índices elementales con ponderaciones iniciales. Es la inversa del promedio aritmético de las inversas de los IP elementales, ponderados con w iniciales.

$$IAL_0^i = \frac{1}{\sum_i w_0^i * \frac{p_0^i}{p_t^i}}$$

IPP (Indice de Precios Paasche): es una media armónica de índices elementales con ponderaciones finales. Es la inversa del promedio aritmético ponderado de las inversas de los IP elementales, ponderados con w finales.

$$IPP_0^i = \frac{1}{\sum_i w_t^i * \frac{p_0^i}{p_t^i}}$$

Índices directos

	Capta efecto sustitución?	Compara bien 0 vs t?	Compara bien t vs (t-1)?
IPL	No	Sí	Sí
IPP	No	Sí	No
IPF	Sí (punta a punta)	Sí	No

Cuál es la solución para capturar los efectos sustitución?

Índices en cadena (indirectos)

	Capta efecto sustitución?	Compara bien 0 vs t?	Compara bien t vs (t-1)?
IPL	Sí, pero	No	Sí
IPP	Sí, pero	No	Sí
IPF	Sí	No	Sí

La fórmula de los índices en cadena

$$IE_{o \to t} = I_{0 \to 1} \cdot I_{1 \to 2} \cdots I_{(b-1) \to b} \cdot I_{b \to (b+1)} \cdots I_{(t-1) \to t}$$

$IE_{o \to t}$: Indice Encadenado en t con período de referencia en 0

Donde:

El eslabón puede adoptar cualquier forma: Laspeyres, Paasche o Fisher

$I_{(t-1) \to t}$: Eslabón en el período t con base en el período (t - 1).

$I_{0 \to 1}$: Eslabón en el período 1 con base en el período 0.

La forma de los índices en cadena

Índice encadenado de precios tipo Laspeyres

$$\underline{Encadenado\ Laspeyres\ de\ precios,\ para\ el\ periodo\ \ t\ con\ referencia\ en\ \ t=o}$$

$$\underline{Encadenado\ Paasche\ de\ precios,\ para\ el\ periodo\ \ t\ con\ referencia\ en\ \ t=o}$$

$$IEP_{o\to t}^{p}=\prod_{t=1}^{T}\frac{\sum_i p_{it}\cdot q_{it}}{\sum_i p_{i(t-1)}\cdot q_{it}} = \frac{1}{\sum_i (\frac{p_{i1}}{p_{io}})^{-1}\cdot w_{i1}}\cdot\frac{1}{\sum_i (\frac{p_{i2}}{p_{i1}})^{-1}\cdot w_{i2}}\cdots\frac{1}{\sum_i (\frac{p_{it}}{p_{i(t-1)}})^{-1}\cdot w_{it}}$$

Indice encadenado de precios tipo Paasche

Indice encadenado de precios tipo Fisher

$$\underline{Encadenado\ Fisher\ de\ precios,\ para\ el\ periodo\ \ t\ con\ referencia\ en\ \ t=o}$$

$$IEF_{o\to t}^{p}=(\sqrt{IL_{o\to 1}^{p}\cdot IP_{o\to 1}^{p}})\cdot(\sqrt{IL_{1\to 2}^{p}\cdot IP_{1\to 2}^{p}})\ \cdots\ (\sqrt{IL_{(t-1)\to t}^{p}\cdot IP_{(t-1)\to t}^{p}})$$

BIBLIOGRAFIA BASICA:

– **Curiel Díaz, Javier,** *La Teoría de los Indices de Precios.* Escuela Universitaria de Estudios Empresariales, Universidad Complutense de Madrid.

– **Leontief, W. (1953),** *Studies in the Structure of the American Economy*, Oxford University Press.

– **Ministerio de Economía (2004),** Análisis N°1 Crecimiento, Empleo y Precios", Ministerio de Economía y Producción.

– **Pulido, A.; Fontela, E., (1993),** *Análisis Input-Output – Modelos, Datos y Aplicaciones*, Ediciones Pirámide.

– **Rasmussen, P N (1956),** *Studies in inter-sectoral relations*, North-Holland.

– **United Nations (1993), "**System of NationalAccounts 1993", United Nations.

– **World Economic Outlook, Building Institutions (September 2005).** Fondo Monetario Internacional.

CUADRO 1.- INDICE DE PRECIOS AL CONSUMIDOR

PERIODO: Año 0 a 10

UNIDAD: Pesos, Unidades, Variaciones Porcentuales y Números Indice, Año 0 = 100,0

A1. = Los precios y las cantidades relativas no se modifican en los períodos 0 y 1

A1.1 = Las cantidades evolución suavemente entre los períodos

PRECIOS (En Pesos por Unidad)

AÑO (T)	X1	X2	X3	X4	AÑO (T)
0	10,0	20,0	40,0	80,0	0
1	11,5	22,0	48,0	88,0	1
2	13,2	26,4	52,8	96,8	2
3	15,2	29,0	63,4	106,5	3
4	17,4	34,8	69,7	117,1	4
5	20,0	38,3	83,6	128,8	5
6	23,0	46,0	92,0	154,6	6
7	26,4	50,6	110,4	185,5	7
8	30,4	60,7	121,4	222,6	8
9	34,9	66,8	145,7	267,2	9
10	40,1	80,1	160,3	320,6	10

4,007464 4,007464 4,007464 4,007464

CANTIDADES (En unidades)

AÑO (T)	X1	X2	X3	X4	AÑO (T)
0	**25,0**	**12,5**	**6,3**	**3,1**	0
1	25,0	13,5	5,3	4,1	1
2	25,0	12,5	6,3	5,1	2
3	25,0	13,5	5,3	6,1	3
4	25,0	12,5	6,3	7,1	4
5	25,0	13,5	5,3	8,1	5
6	25,0	12,5	6,3	7,1	6
7	25,0	13,5	5,3	6,1	7
8	25,0	12,5	6,3	5,1	8
9	25,0	13,5	5,3	4,1	9
10	25,0	12,5	6,3	3,1	10

VARIACION INTERANUAL DE PRECIOS (T / T-1)

AÑO (T)	X1	X2	X3	X4	AÑO (T)
0			0		
1	14,9	10,0	20,0	10,0	1
2	14,9	20,0	10,0	10,0	2
3	14,9	10,0	20,0	10,0	3
4	14,9	20,0	10,0	10,0	4
5	14,9	10,0	20,0	10,0	5
6	14,9	20,0	10,0	20,0	6
7	14,9	10,0	20,0	20,0	7
8	14,9	20,0	10,0	20,0	8
9	14,9	10,0	20,0	20,0	9
10	14,8	20,0	10,0	20,0	10

REFERENCIAS:

IPL = Indice de Precios Laspeyres de Base Fija (Año 0)
IPP = Indice de Precios Paasche de Base Fija (Año 11)
IPLEncadenado = Indice de Precios Laspeyres de Base Encadenada (Año T-1)
IPPEncadenado = Indice de Precios Paasche de Base Encadenada (Año T)

VALOR DE LA CANASTA (Po x Qo) A PRECIOS CORRIENTES (En Pesos)

X1	X2	X3	X4	
250,0	250,0	250,0	250,0	**1.000,0**
287,3	297,0	252,0	363,0	**1.199,3**
330,1	330,0	330,0	496,1	**1.486,2**
379,2	392,0	332,6	652,2	**1.756,1**
435,7	435,6	435,6	834,5	**2.141,5**
500,7	517,5	439,1	1.046,8	**2.504,1**
575,3	575,0	575,0	1.101,6	**2.826,8**
661,0	683,1	579,6	1.136,4	**3.060,0**
759,5	759,0	759,0	1.141,0	**3.418,4**
872,6	901,7	765,1	1.102,1	**3.641,4**
1.001,9	1.001,9	1.001,9	1.001,9	**4.007,5**
4,007464	4,007464	4,007464	4,007464	4,007464

VALOR DE LA CANASTA (Pt x Qo) A CANTIDADES DEL AÑO "0" (En Pesos)

X1	X2	X3	X4		IPL	Var %
250,0	250,0	250,0	250,0		**1.000,0**	**100,0**
287,3	275,0	300,0	275,0	**1.137,3**	**113,7**	**13,7**
330,1	330,0	330,0	302,5	**1.292,6**	**129,3**	**13,7**
379,2	363,0	396,0	332,8	**1.471,0**	**147,1**	**13,8**
435,7	435,6	435,6	366,0	**1.673,0**	**167,3**	**13,7**
500,7	479,2	522,7	402,6	**1.905,2**	**190,5**	**13,9**
575,3	575,0	575,0	483,2	**2.208,4**	**220,8**	**15,9**
661,0	632,5	690,0	579,8	**2.563,2**	**256,3**	**16,1**
759,5	759,0	759,0	695,7	**2.973,2**	**297,3**	**16,0**
872,6	834,9	910,8	834,9	**3.453,2**	**345,3**	**16,1**
1.001,9	1.001,9	1.001,9	1.001,9	**4.007,5**	**400,7**	**16,1**
4,007464	4,007464		4,007464	4,007464		4,007464

VALOR DE LA CANASTA (Pt x Q10) A CANTIDADES DEL AÑO "10" (En Pesos)

X1	X2	X3	X4		IPP	Var %
250,0	250,0	250,0	250,0		**1.000,0**	**100,0**
287,3	275,0	300,0	275,0	**1.137,3**	**113,7**	**13,7**
330,1	330,0	330,0	302,5	**1.292,6**	**129,3**	**13,7**
379,2	363,0	396,0	332,8	**1.471,0**	**147,1**	**13,8**
435,7	435,6	435,6	366,0	**1.673,0**	**167,3**	**13,7**
500,7	479,2	522,7	402,6	**1.905,2**	**190,5**	**13,9**
575,3	575,0	575,0	483,2	**2.208,4**	**220,8**	**15,9**
661,0	632,5	690,0	579,8	**2.563,2**	**256,3**	**16,1**
759,5	759,0	759,0	695,7	**2.973,2**	**297,3**	**16,0**
872,6	834,9	910,8	834,9	**3.453,2**	**345,3**	**16,1**
1.001,9	1.001,9	1.001,9	1.001,9	**4.007,5**	**400,7**	**16,1**
4,007464	4,007464		4,007464	4,007464		4,007464

VALOR DE LA CANASTA (Pt x Qt-1) A CANTIDADES DEL AÑO "T - 1" (En Pesos)

AÑO (T)	X1	X2	X3	X4		IPLEncadenado
0			**100,0**			
1	287,3	275,0	300,0	275,0	**1.137,3**	**113,7**
2	330,1	356,4	277,2	399,3	**1.363,0**	**129,2**
3	379,2	363,0	396,0	545,7	**1.683,9**	**146,5**
4	435,7	470,4	365,9	717,4	**1.989,5**	**165,9**
5	500,7	479,2	522,7	918,0	**2.420,5**	**187,5**
6	575,3	621,0	483,0	1.256,2	**2.935,4**	**219,8**
7	661,0	632,5	690,0	1.321,9	**3.305,4**	**257,1**
8	759,5	819,7	637,6	1.363,7	**3.580,4**	**300,8**
9	872,6	834,9	910,8	1.369,2	**3.987,5**	**350,8**
10	1.001,9	1.082,0	841,6	1.322,5	**4.247,9**	**409,3**

VALOR DE LA CANASTA (Pt-1 x Qt) A CANTIDADES DEL AÑO "T" (En Pesos)

AÑO (T)	X1	X2	X3	X4		IPPEncadenado
0	250,0	270,0	210,0	330,0	**1.060,0**	**100,0**
1	287,3	275,0	300,0	451,0	**1.313,3**	**113,1**
2	330,1	356,4	277,2	592,9	**1.556,6**	**128,0**
3	379,2	363,0	396,0	758,7	**1.896,9**	**144,4**
4	435,7	470,4	365,9	951,7	**2.223,7**	**163,1**
5	500,7	479,2	522,7	918,0	**2.420,5**	**183,6**
6	575,3	621,0	483,0	947,0	**2.626,2**	**214,4**
7	661,0	632,5	690,0	950,8	**2.934,3**	**249,9**
8	759,5	819,7	637,6	918,4	**3.135,1**	**291,1**
9	872,6	834,9	910,8	834,9	**3.453,2**	**338,1**
10	-	-	-	-	**-**	**392,4**

CUADRO 1.- INDICE DE PRECIOS AL CONSUMIDOR

PERIODO: Año 0 a 10

UNIDAD: Pesos, Unidades, Variaciones Porcentuales y Números Indice, Año 0 = 100,0

A1. = Los precios y las cantidades relativas no se modifican en los períodos 0 y 1

A1.2 = Las cantidades fluctuan fuertemente entre los períodos

PRECIOS (En Pesos por Unidad)

AÑO (T)	X1	X2	X3	X4	AÑO (T)
0	10,0	20,0	40,0	80,0	0
1	11,5	22,0	48,0	88,0	1
2	13,2	26,4	52,8	96,8	2
3	15,2	29,0	63,4	106,5	3
4	17,4	34,8	69,7	117,1	4
5	20,0	38,3	83,6	128,8	5
6	23,0	46,0	92,0	154,6	6
7	26,4	50,6	110,4	185,5	7
8	30,4	60,7	121,4	222,6	8
9	34,9	66,8	145,7	267,2	9
10	40,1	80,1	160,3	320,6	10
	4,007464	4,007464	4,007464	4,007464	

CANTIDADES (En unidades)

AÑO (T)	X1	X2	X3	X4	AÑO (T)
0	25,0	12,5	6,3	3,1	0
1	25,0	15,5	3,3	6,1	1
2	25,0	12,5	6,3	9,1	2
3	25,0	15,5	3,3	12,1	3
4	25,0	12,5	6,3	15,1	4
5	25,0	15,5	3,3	18,1	5
6	25,0	12,5	6,3	15,1	6
7	25,0	15,5	3,3	12,1	7
8	25,0	12,5	6,3	9,1	8
9	25,0	15,5	3,3	6,1	9
10	25,0	12,5	6,3	3,1	10

VARIACION INTERANUAL DE PRECIOS (T / T-1)

AÑO (T)	X1	X2	X3	X4	AÑO (T)
					0
	15	10	20	10	**1**
	15	20	10	10	**2**
	15	10	20	10	**3**
	15	20	10	10	**4**
	15	10	20	10	**5**
	15	20	10	20	**6**
	15	10	20	20	**7**
	15	20	10	20	**8**
	15	10	20	20	**9**
	15	20	10	20	**10**

VALOR DE LA CANASTA (Po x Qo) A PRECIOS CORRIENTES (En Pesos)

X1	X2	X3	X4	
250,0	250,0	250,0	250,0	**1.000,0**
287,3	341,0	156,0	539,0	**1.323,3**
330,1	330,0	330,0	883,3	**1.873,4**
379,2	450,1	205,9	1.291,1	**2.326,3**
435,7	435,6	435,6	1.771,6	**3.078,5**
500,7	594,2	271,8	2.335,2	**3.701,9**
575,3	575,0	575,0	2.338,5	**4.063,7**
661,0	784,3	358,8	2.249,6	**4.053,6**
759,5	759,0	759,0	2.031,6	**4.309,0**
872,6	1.035,3	473,6	1.636,4	**4.017,9**
1.001,9	1.001,9	1.001,9	1.001,9	**4.007,5**
4,007464	4,007464	4,007464	4,007464	4,007464

VALOR DE LA CANASTA (Pt x Qo) A CANTIDADES DEL AÑO "0" (En Pesos)

X1	X2	X3	X4		IPL	Var %
250,0	250,0	250,0	250,0	**1.000,0**	**100,0**	
287,3	275,0	300,0	275,0	**1.137,3**	**113,7**	**13,7**
330,1	330,0	330,0	302,5	**1.292,6**	**129,3**	**13,7**
379,2	363,0	396,0	332,8	**1.471,0**	**147,1**	**13,8**
435,7	435,6	435,6	366,0	**1.673,0**	**167,3**	**13,7**
500,7	479,2	522,7	402,6	**1.905,2**	**190,5**	**13,9**
575,3	575,0	575,0	483,2	**2.208,4**	**220,8**	**15,9**
661,0	632,5	690,0	579,8	**2.563,2**	**256,3**	**16,1**
759,5	759,0	759,0	695,7	**2.973,2**	**297,3**	**16,0**
872,6	834,9	910,8	834,9	**3.453,2**	**345,3**	**16,1**
1.001,9	1.001,9	1.001,9	1.001,9	**4.007,5**	**400,7**	**16,1**
4,007464	4,007464	4,007464	4,007464	4,007464		

VALOR DE LA CANASTA (Pt x Q10) A CANTIDADES DEL AÑO "10" (En Pesos)

X1	X2	X3	X4		IPP	Var %
250,0	250,0	250,0	250,0	**1.000,0**	**100,0**	
287,3	275,0	300,0	275,0	**1.137,3**	**113,7**	**13,7**
330,1	330,0	330,0	302,5	**1.292,6**	**129,3**	**13,7**
379,2	363,0	396,0	332,8	**1.471,0**	**147,1**	**13,8**
435,7	435,6	435,6	366,0	**1.673,0**	**167,3**	**13,7**
500,7	479,2	522,7	402,6	**1.905,2**	**190,5**	**13,9**
575,3	575,0	575,0	483,2	**2.208,4**	**220,8**	**15,9**
661,0	632,5	690,0	579,8	**2.563,2**	**256,3**	**16,1**
759,5	759,0	759,0	695,7	**2.973,2**	**297,3**	**16,0**
872,6	834,9	910,8	834,9	**3.453,2**	**345,3**	**16,1**
1.001,9	1.001,9	1.001,9	1.001,9	**4.007,5**	**400,7**	**16,1**
4,007464	4,007464	4,007464	4,007464	4,007464		

VALOR DE LA CANASTA (Pt x Qt-1) A CANTIDADES DEL AÑO "T - 1" (En Pesos)

AÑO (T)	X1	X2	X3	X4		IPLEncadenado	Var %
0						100,0	
1	287,3	275,0	300,0	275,0	1.137,3	113,7	13,7
2	330,1	409,2	171,6	592,9	1.503,8	129,2	13,6
3	379,2	363,0	396,0	971,6	2.109,9	145,6	12,6
4	435,7	540,1	226,5	1.420,2	2.622,6	164,1	12,7
5	500,7	479,2	522,7	1.948,7	3.451,3	184,0	12,1
6	575,3	713,0	299,0	2.802,3	4.389,5	218,1	18,6
7	661,0	632,5	690,0	2.806,2	4.789,6	257,1	17,9
8	759,5	941,1	394,7	2.699,5	4.794,7	304,1	18,3
9	872,6	834,9	910,8	2.437,9	5.056,2	356,8	17,3
10	1.001,9	1.242,3	521,0	1.963,7	4.728,8	420,0	17,7

VALOR DE LA CANASTA (Pt-1 x Qt) A CANTIDADES DEL AÑO "T" (En Pesos)

AÑO (T)	X1	X2	X3	X4		IPPEncadenado	Var %
0	250,0	310,0	130,0	490,0	1.180,0	100,0	
1	287,3	275,0	300,0	803,0	1.665,3	112,1	12,1
2	330,1	409,2	171,6	1.173,7	2.084,6	126,2	12,5
3	379,2	363,0	396,0	1.610,5	2.748,7	140,8	11,6
4	435,7	540,1	226,5	2.122,9	3.325,3	157,7	12,0
5	500,7	479,2	522,7	1.948,7	3.451,3	175,5	11,3
6	575,3	713,0	299,0	1.874,6	3.461,9	206,7	17,7
7	661,0	632,5	690,0	1.693,0	3.676,4	242,0	17,1
8	759,5	941,1	394,7	1.363,7	3.458,9	283,6	17,2
9	872,6	834,9	910,8	834,9	3.453,2	329,5	16,2
10	-	-	-	-	-	382,4	16,1